Quel est le nombre optimal de robots pour explorer un anneau hautement dynamique ? †

Marjorie Bournat, Swan Dubois et Franck Petit

UPMC Sorbonne Universités, CNRS, Inria, LIP6 UMR 7606, France

Dans cet article, nous nous intéressons à la coordination algorithmique d'une cohorte de robots mobiles. Ces robots sont autonomes, uniformes, anonymes, capables de percevoir leur environnement, mais pas de communiquer. Ils évoluent de manière synchrone dans un environnement fini et discret représenté par un graphe. Nous supposons que cet environnement est un anneau hautement dynamique, c'est-à-dire un anneau dont les arêtes peuvent apparaître et disparaître de manière imprévisible sans aucune hypothèse de récurrence, de stabilité ou de périodicité à travers le temps mais avec une hypothèse de connexité temporelle minimale à la résolution du problème. Nous nous intéressons en particulier au problème de l'exploration perpétuelle de ce type de graphe, problème dans lequel chaque nœud de l'anneau doit être infiniment souvent visité par un robot. Notre contribution est la caractérisation exhaustive du nombre de robots nécessaires et suffisants pour résoudre ce problème en fonction de la taille de l'anneau.

Mots-clefs : Graphes hautement dynamiques, graphes évolutifs, exploration perpétuelle, robots synchrones

1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à la coordination de robots mobiles dans un environnement discret et hautement dynamique. Notre préoccupation principale est la caractérisation du nombre minimal de robots permettant de résoudre le problème de l'exploration perpétuelle de ce type d'environnement.

Contexte. Nous considérons un ensemble de *robots* autonomes se déplaçant dans un environnement discret, anonyme, bidirectionnel et hautement dynamique. Par *environnement discret, anonyme et bidirectionnel*, nous désignons un espace partitionné en un nombre *fini* de lieux (discret) représenté par un graphe où chaque nœud est indistinguable des autres nœuds (anonyme) et représente un lieu susceptible d'être occupé par un ou plusieurs robots et où une arête représente la possibilité pour un robot de se déplacer (dans les deux directions) d'un lieu à un autre (bidirectionnel). De plus, ce graphe est dynamique dans le sens où ses arêtes peuvent apparaître et disparaître au cours du temps. Pour modéliser cela, nous considérons le temps comme discret et définissons un *graphe évolutif* (selon [5]) comme une suite de graphes statiques construits sur un ensemble constant de nœuds. Chaque graphe de cette suite contient les arêtes présentes dans l'environnement des robots à l'instant associé. Dans un graphe évolutif, les arêtes peuvent se répartir en deux catégories : les arêtes *manquantes à terme* et les arêtes *récurrentes*. Les premières sont des arêtes qui disparaissent définitivement après un instant donné ; les secondes sont infiniment souvent présentes dans la suite de graphes. Un graphe évolutif est dit *hautement dynamique* si les arêtes peuvent apparaître et disparaître de manière imprévisible sans aucune hypothèse de récurrence, de stabilité ou de périodicité à travers le temps, à la condition que les arêtes récurrentes induisent un graphe couvrant connexe. Cette condition permet à un robot d'atteindre tout nœud du graphe quel que soit son nœud et sa date de départ.

Chaque robot est doté d'une unité de calcul, d'un mécanisme lui permettant de se déplacer d'un nœud à un autre et de capteurs capables de déterminer la présence des arêtes adjacentes au nœud sur lequel le robot se trouve. Les capteurs lui permettent également d'être informé de la *multiplicité* (*faible*) du nœud, c'est-à-dire de savoir si le robot est seul à occuper le nœud ou non. Si plusieurs robots occupent un même nœud au même instant, nous dirons qu'ils forment une *tour*. Les robots évoluent dans un graphe hautement dynamique de manière synchrone en effectuant chacun un cycle atomique à chaque instant. Ce cycle comporte trois phases.

†Ce travail a été effectué dans le cadre du projet ANR ESTATE (Ref. ANR-16-CE25-0009-03). Une version longue de ce travail figure dans les actes du 37^{th} IEEE International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS 2017) [2].

La première est la phase d'*observation*. Elle consiste à capter et transmettre ces informations (présence des arêtes adjacentes et multiplicité du nœud) à l'unité de calcul du robot. Elle est suivie d'une phase de *calcul* au cours de laquelle, sur la base des observations recueillies, l'unité de calcul exécute un algorithme qui établit la direction (droite ou gauche) à prendre lors de la phase de *déplacement*, c'est-à-dire l'arête adjacente que doit essayer de traverser (de manière atomique) le robot. Si l'arête n'est pas présente à cet instant, le robot reste sur son nœud.

Les robots exécutent tous le même algorithme déterministe (uniformité), n'ont aucun moyen de se distinguer entre eux (anonymat), possèdent de la mémoire persistante de taille constante, n'ont aucune connaissance sur le graphe (taille, dynamicité des arêtes) et sont incapables de communiquer de manière explicite. De plus, les robots ne possèdent pas nécessairement tous la même chiralité : la droite d'un robot peut désigner la même direction que la gauche d'un autre. Ainsi, d'un point de vue externe, il est possible de voir bouger deux robots dans la même direction, alors que localement les deux robots considèrent des directions opposées, et inversement. Dans la suite, par soucis de clarté, nous parlons de *sens horaire* et de sens *trigonométrique* pour désigner les déplacements observés d'un point de vue externe.

Exploration perpétuelle. Dans ce contexte, un problème fondamental est celui de l'*exploration* qui consiste à garantir que les robots visitent chaque nœud de l'anneau. Il existe différentes variantes de ce problème, notamment selon que l'on impose aux robots de s'arrêter ou non une fois l'exploration réalisée. Dans cet article, nous nous intéressons à la variante *perpétuelle* du problème dans laquelle chaque nœud doit être infiniment souvent visité par un robot. Ce problème peut avoir de nombreuses applications comme la maintenance d'un réseau, la réalisation de patrouilles de sécurité, la recherche de personnes égarées, *etc*.

Dans la suite, nous supposerons que les robots sont initialement disséminés dans l'anneau de façon qu'il n'y ait pas de tour. De plus, nous considérerons que le nombre de nœuds de l'anneau est strictement supérieur au nombre de robots de sorte que l'anneau ne soit pas initialement exploré de manière triviale.

État de l'art. L'exploration a été largement étudiée dans un cadre statique. Par manque de place, nous présentons ici seulement les résultats obtenus pour des systèmes dynamiques. Ilcinkas et Wade [4] ont étudié l'exploration (avec arrêt) pour les graphes dynamiques dont les arêtes sont périodiques. Di Luna *et al*. [3] ont étudié l'exploration (selon différentes variantes) pour les anneaux 1-intervalle connexe (c'est-à-dire connectés à chaque instant). Le seul travail existant sur les graphes hautement dynamiques (dans lesquels l'apparition des arêtes n'est pas périodique et le graphe peut être déconnecté à tout instant) est dû à Bournat *et al*. [1] qui ont montré la faisabilité de l'exploration perpétuelle en donnant un algorithme pour les anneaux hautement dynamiques avec *exactement* trois robots munis d'identifiants uniques. La question de l'optimalité du nombre de robots et donc de la caractérisation du nombre minimal de robots nécessaires et suffisants en fonction de la taille de l'anneau est laissée en question ouverte.

Contributions. Dans cet article, nous répondons à cette question ouverte à l'aide des résultats suivants. Dans la section 2, nous prouvons la nécessité (i) d'au moins trois robots pour explorer perpétuellement les anneaux de taille supérieure ou égale à 4 et (ii) d'au moins deux robots pour les anneaux de taille égale à 3. Dans la section 3, nous décrivons des algorithmes prouvant le caractère suffisant des propriétés (i) et (ii).

2 Nombre de robots nécessaires

Dans cette section, nous présentons deux résultats d'impossibilité. Nous montrons qu'un seul robot ne peut pas explorer de manière perpétuelle et déterministe un anneau hautement dynamique de taille strictement supérieure à 2. Puis, nous montrons que deux robots synchrones ne peuvent pas explorer de manière perpétuelle et déterministe des anneaux hautement dynamiques de taille strictement supérieure à 3. Notez que ces résultats restent valables avec une mémoire de taille quelconque. De manière intuitive, ces résultats sont basés sur le fait que, dans un anneau hautement dynamique, il peut exister une arête manquante à terme. Étant donné qu'un robot ne peut pas faire la distinction entre une arête manquante à terme et une arête récurrente absente à un moment donné, il ne peut pas se contenter de conserver une direction unique. Cependant, il peut alors changer sa direction de manière prématurée et n'explorer qu'une partie de l'anneau.

Résultat d'impossibilité pour un robot. Pour montrer ce résultat, nous construisons un anneau hautement dynamique de taille strictement supérieure à 2 tel qu'un seul robot ne puisse pas l'explorer perpétuellement (quel que soit son algorithme).

Le graphe est construit par récurrence (voir figure 1) à partir d'un anneau initial auquel il ne manque aucune arête. Supposons qu'à un instant t_i, l'unique robot se trouve sur un nœud u du graphe tel qu'une de ses arêtes adjacentes e_{ug} soit présente, que son autre arête adjacente e_{ud} soit absente et que toutes les autres arêtes de l'anneau soient présentes. Notons G_i cette configuration. Si le graphe reste dans cette configuration pendant un intervalle de temps assez grand, alors il existe un temps t_i' auquel le robot finit par traverser l'arête e_{ug}. En effet, si ce n'était pas le cas et que l'arête e_{ud} s'avérait être une arête manquante à terme, alors le robot ne quitterait jamais le nœud u rendant impossible l'exploration perpétuelle de l'anneau. Nous pouvons construire un anneau dynamique de telle sorte que l'anneau soit dans la configuration G_i du temps t_i au temps t_i'. Ainsi, au temps $t_i' = t_{i+1} - 1$, le robot traverse l'arête e_{ug} et, au temps t_{i+1}, il se trouve sur le nœud v. Nous continuons la construction de l'anneau de la manière suivante. À partir de t_{i+1}, l'arête adjacente à v menant à u (notée e_{vd}) est présente, son autre arête adjacente est absente et toutes les autres arêtes de l'anneau sont présentes. Notons G_{i+1} cette configuration. De même que précédemment, si l'anneau reste dans la configuration G_{i+1} pendant un intervalle de temps assez grand, il existe un temps t_{i+1}' auquel le robot traverse l'arête e_{vd}. Nous pouvons construire un anneau dynamique de telle sorte que l'anneau se trouve dans la configuration G_{i+1} du temps t_{i+1} au temps t_{i+1}'. Ainsi, au temps $t_{i+1}' = t_{i+2} - 1$, le robot traverse l'arête e_{vd} et, au temps t_{i+2}, il se trouve sur le nœud u.

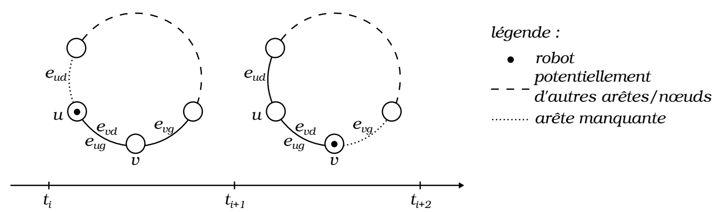

FIGURE 1: Construction de G_i et G_{i+1} (preuve d'impossibilité avec un robot).

En remarquant que la configuration au temps t_{i+2} est similaire à celle au temps t_i, nous pouvons itérer la construction à l'infini pour obtenir un anneau dynamique dans lequel le robot effectue uniquement des allers-retours entre les nœuds u et v. Comme l'anneau obtenu est bien hautement dynamique (toutes ses arêtes sont récurrentes), nous prouvons qu'aucun algorithme ne peut explorer perpétuellement un anneau hautement dynamique de taille strictement supérieure à 2 avec un seul robot.

Résultat d'impossibilité pour deux robots. L'idée de cette preuve est similaire à la précédente : construire un anneau dynamique de taille strictement supérieure à 3 tel que deux robots ne puissent pas l'explorer de manière perpétuelle (quel que soit leur algorithme).

De même que dans la preuve précédente, l'anneau dynamique construit correspond à une succession (cyclique) de configurations (voir figure 2). Notons que, dans chacune de ces configurations, un des deux robots ne peut pas bouger (car aucune arête adjacente n'est présente) tandis que l'autre est situé sur un nœud avec une arête adjacente présente et l'autre absente. Si l'anneau reste dans une de ces configurations suffisamment longtemps, alors il existe nécessairement un temps auquel le second robot traverse l'arête adjacente présente à son nœud. En effet, si ce n'était pas le cas, alors il serait possible de prouver que, lorsque les deux robots sont situés respectivement sur les deux extrémités d'une arête manquante à terme, aucun ne bougera jamais, rendant impossible l'exploration perpétuelle de l'anneau.

Comme précédemment, nous pouvons itérer la construction à l'infini pour obtenir un anneau dynamique dans lequel les robots visitent uniquement les nœuds u, v et w. Comme l'anneau obtenu est bien hautement dynamique (toutes ses arêtes sont récurrentes), nous prouvons qu'aucun algorithme ne peut explorer perpétuellement un anneau hautement dynamique de taille strictement supérieure à 3 avec deux robots.

3 Nombre de robots suffisants

Dans [2], nous présentons $\mathbb{EP}\_1$ (resp. $\mathbb{EP}\_2$), deux algorithmes triviaux résolvant l'exploration perpétuelle sur des anneaux hautement dynamiques de taille 2 (resp. 3) avec un (resp. deux) robot(s). Nous allons ici présenter uniquement $\mathbb{EP}\_3+$, un algorithme permettant à trois robots ou plus d'explorer perpétuellement des anneaux hautement dynamiques de taille strictement supérieure au nombre de robots.

Algorithme $\mathbb{EP}\_3+$. Cet algorithme repose sur l'observation qu'au plus une arête peut être manquante à terme dans un anneau hautement dynamique. Dans le cas où il n'y a pas d'arête manquante à terme, il suffit que chaque robot conserve toujours sa direction pour résoudre l'exploration perpétuelle. Dans le cas où il y a une arête manquante à terme, il suffit qu'un robot conserve sa direction jusqu'à atteindre une extrémité de l'arête manquante à terme, puis fasse demi-tour et conserve sa direction jusqu'à atteindre

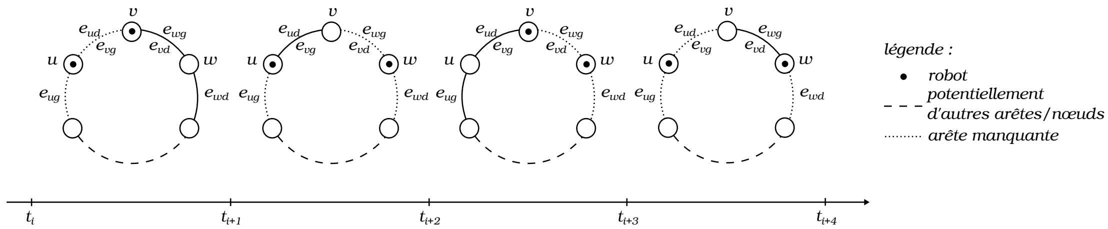

FIGURE 2: Construction de G_i, G_{i+1}, G_{i+2}, et G_{i+3} (preuve d'impossibilité avec deux robots).

l'autre extrémité de l'arête manquante à terme, et ainsi de suite. Cependant, lorsqu'un robot considère une direction, et qu'il n'y a pas d'arête adjacente dans cette direction, il ne peut pas déterminer s'il s'agit d'une arête manquante à terme ou d'une arête récurrente. Ainsi, si l'on suit l'algorithme précédent et qu'un robot fait demi-tour lorsqu'il atteint l'extrémité d'une arête manquante (en estimant avoir atteint une extrémité de l'arête manquante à terme), certains nœuds de l'anneau pourraient ne jamais être visités. Pour éviter cet écueil, $\mathbb{EP}\_3+$ utilise la règle suivante :

Règle 1 : Un robot isolé ne change pas de direction.

Étant donné que trois robots ou plus sont utilisés et que seules deux directions sont possibles, l'application de la règle 1 implique qu'il y a nécessairement des tours formées lorsqu'il existe une arête manquante à terme. Lorsque deux robots forment une tour, $\mathbb{EP}\_3+$ doit autoriser un (ou les deux robots) à changer de direction. En effet, dans le cas contraire, les robots pourraient ne plus bouger s'ils étaient tous réunis dans une même tour située sur un nœud adjacent à l'arête manquante à terme, ce qui empêcherait l'exploration perpétuelle. L'option retenue pour $\mathbb{EP}\_3+$ est la suivante :

Règle 2 : Un robot non isolé change sa direction uniquement s'il s'est déplacé à l'instant précédent.

Bien que cet algorithme fonctionne pour tout nombre de robots supérieur ou égal à 3, nous allons, par souci de simplicité, nous restreindre au cas de trois robots pour présenter les éléments de preuve qui suivent.

Considérons en premier le cas où il n'existe pas d'arête manquante à terme. Nous pouvons montrer que $\mathbb{EP}\_3+$ garantit que, si un robot est présent sur un nœud u considérant le sens horaire (resp. trigonométrique), alors, en un temps fini, il existe un robot sur le nœud adjacent à u dans le sens horaire (resp. trigonométrique) considérant le sens horaire (resp. trigonométrique). Par récurrence, cette propriété prouve l'exploration perpétuelle de l'anneau.

Dans le cas où il existe une arête manquante à terme, la construction de $\mathbb{EP}\_3+$ implique qu'à terme un robot (qualifié de sentinelle) est positionné sur chacune des extrémités de l'arête manquante à terme et ne bouge plus. Le troisième robot (que nous appelons explorateur), en appliquant la règle 1, considère la même direction jusqu'à atteindre une des sentinelles. Lorsque l'explorateur rencontre une sentinelle, en appliquant la règle 2, il change la direction qu'il considère. Par récurrence, l'explorateur effectue donc des allers-retours entre les deux sentinelles, garantissant l'exploration perpétuelle de l'anneau.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré que le nombre optimal de robots pour explorer un anneau hautement dynamique de taille n est : 1 lorsque $n = 2$; 2 lorsque $n = 3$; et 3 lorsque $n \geq 4$. De plus, $\mathbb{EP}\_3+$ est générique dans la mesure où il est capable d'explorer perpétuellement tout anneau hautement dynamique de taille n avec tout nombre de robots compris entre 3 et $n-1$.

Références

[1] M. Bournat, A. K. Datta, and S. Dubois. Self-stabilizing robots in highly dynamic environments. In *SSS*, pages 54–69, 2016.

[2] M. Bournat, S. Dubois, and F. Petit. Computability of perpetual exploration in highly dynamic rings. In *ICDCS*, to appear.

[3] G. Di Luna, S. Dobrev, P. Flocchini, and N. Santoro. Live exploration of dynamic rings. In *ICDCS*, pages 570–579, 2016.

[4] D. Ilcinkas and A. Wade. On the power of waiting when exploring public transportation systems. In *OPODIS*, pages 451–464, 2011.

[5] B. Xuan, A. Ferreira, and A. Jarry. Computing shortest, fastest, and foremost journeys in dynamic networks. *IJFCS*, 14(02) :267–285, 2003.