

Systèmes temporisés (suite)

MI045 – Modélisation et Représentation des Connaissances

Mathieu Sassolas
`mathieu.sassolas@lip6.fr`

Université Pierre et Marie Curie

6 mai 2010

Plan du cours

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

- 1 Composition d'automates temporisés
 - Motivations
 - Définition
 - Exemple
- 2 Abstraction du temps par l'automate des régions
 - Motivation
 - Construction des régions
 - Construction de l'automate des régions
 - Exemple

Besoin de modélisation modulaire

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

Motivations

Définition

Exemple

L'abstraction des
régions

- ▶ Des parties plus petites sont plus facilement modélisables par l'homme.
- ▶ Modélisation de différentes parties par différents acteurs.
- ▶ Vérification plus simple de chaque modèle.
- ▶ Un processus de modélisation itératif.

Intuition

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

Motivations

Définition

Exemple

L'abstraction des
régions

- ▶ Synchronisation sur certaines actions
- ▶ Les autres actions sont indépendantes les unes des autres
- ▶ Les horloges restent indépendantes
- ▶ Toutes les horloges gardent la même pente

Définition

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

Motivations

Définition

Exemple

L'abstraction des
régions

Si $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, q_1^i, \Sigma_1, X_1, \Delta_1, Inv_1 \rangle$ et $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, q_2^i, \Sigma_2, X_2, \Delta_2, Inv_2 \rangle$ sont des automates temporisés avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, la synchronisation de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 est l'automate temporisé $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2 = \langle Q, q^i, \Sigma, X, \Delta, Inv \rangle$ où

- ▶ $Q = Q_1 \times Q_2$
- ▶ $q^i = (q_1^i, q_2^i)$
- ▶ $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- ▶ $X = X_1 \cup X_2$
- ▶ Supposons que $(q_1, g_1, a_1, r_1, q_1')$ $\in \Delta_1$ et $(q_2, g_2, a_2, r_2, q_2')$ $\in \Delta_2$.
 - si $a_1 = a_2 = a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, on se synchronise :
 $((q_1, q_2), g_1 \wedge g_2, a, r_1 \cup r_2, (q_1', q_2')) \in \Delta$
 - si $a_1 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$, seul \mathcal{A}_1 évolue : $((q_1, q_2), g_1, a_1, r_1, (q_1', q_2)) \in \Delta$
 - si $a_2 \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$, seul \mathcal{A}_2 évolue : $((q_1, q_2), g_2, a_2, r_2, (q_1, q_2')) \in \Delta$
- ▶ $\forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2, Inv(q_1, q_2) = Inv_1(q_1) \wedge Inv_2(q_2)$

Exemple – Automates originaux

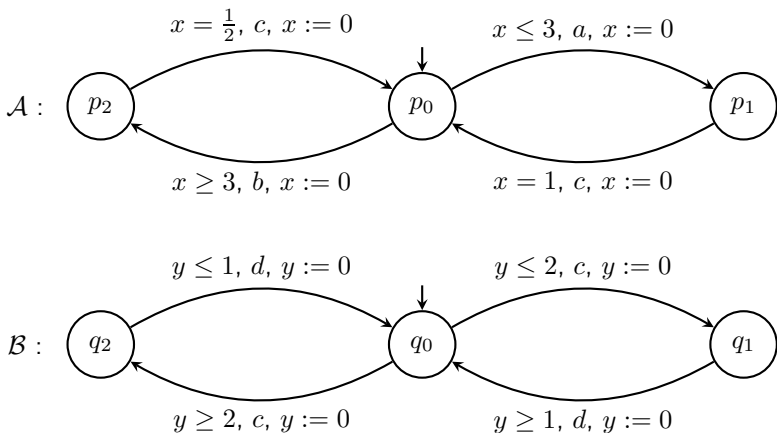
MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition
Motivations
Définition
Exemple

L'abstraction des
régions



\hookrightarrow Synchronisation sur c .

Exemple – Composition

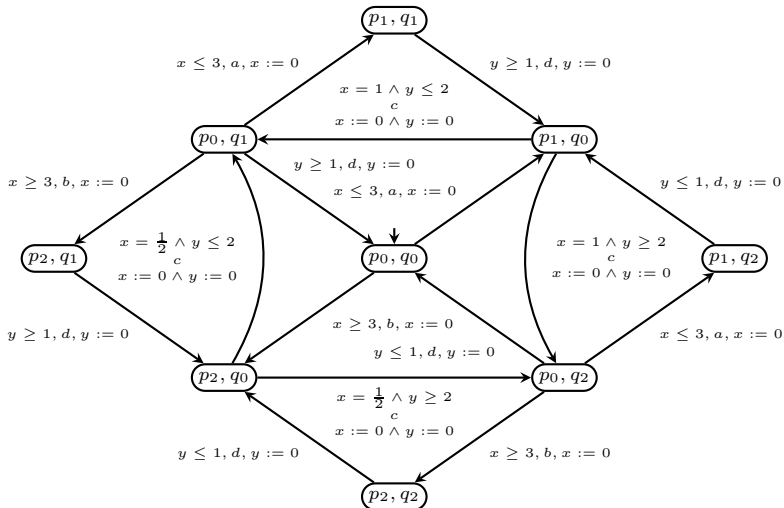
MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition
Motivations
Définition
Exemple

L'abstraction des
régions



Accessibilité

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

Motivation

Les régions

L'automate des
régions

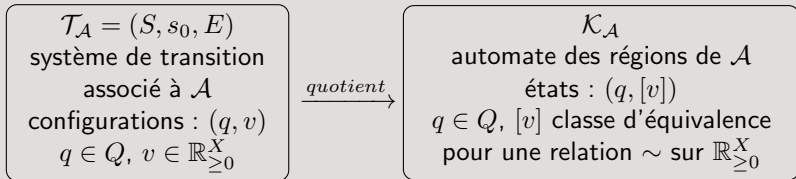
Exemple

Théorème ([Alur et Dill, 1990])

L'accessibilité d'un état de contrôle est décidable pour les automates temporisés.

Procédure de décision.

Donnée : un automate temporisé $\mathcal{A} = (X, Q, q_0, \Delta, Inv)$, avec domaine de temps $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et un état de contrôle q_f



Construction d'un automate non temporisé $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ tel que :
 \mathcal{A} a une exécution qui atteint (q_f, v_f) \iff $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ a une exécution qui atteint $(q_f, [v_f])$. □

Construction d'une relation quotient

Définition (Équivalence des régions)

La relation que l'on veut construire a les propriétés suivantes : Pour deux valuations équivalentes $v \sim v'$

1. si une transition **d'action** $q \xrightarrow{g,a,r} q'$ est possible depuis v , alors la même transition est possible depuis v' et les valuations obtenues $v[r \mapsto 0]$ et $v'[r \mapsto 0]$ sont équivalentes,
2. si une transition **de délai** d est possible depuis v , alors une transition de délai d' est possible depuis v' et les valuations obtenues $v + d$ et $v' + d'$ sont équivalentes.

Construction d'une relation quotient

Définition (Équivalence des régions)

La relation que l'on veut construire a les propriétés suivantes : Pour deux valuations équivalentes $v \sim v'$

1. si une transition **d'action** $q \xrightarrow{g,a,r} q'$ est possible depuis v , alors la même transition est possible depuis v' et les valuations obtenues $v[r \mapsto 0]$ et $v'[r \mapsto 0]$ sont équivalentes,
2. si une transition **de délai** d est possible depuis v , alors une transition de délai d' est possible depuis v' et les valuations obtenues $v + d$ et $v' + d'$ sont équivalentes.

Remarques

- ▶ Cette relation est une bisimulation avec abstraction du temps entre les états de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} : Q \times \mathbb{R}_{\geq 0}^X$ et ceux de $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} : Q \times \mathbb{R}_{\geq 0}^X / \sim$.
- ▶ Pour la première condition, il suffit de considérer les contraintes $x \bowtie k$, pour les horloges de X et les constantes $0 \leq k \leq m$, où m est la plus grande constante apparaissant dans les contraintes de \mathcal{A} .

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

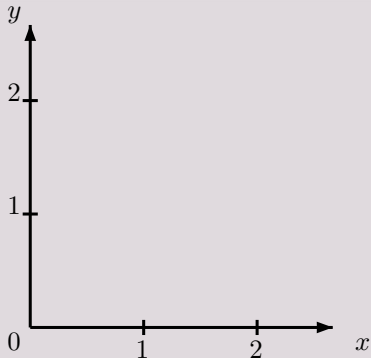
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

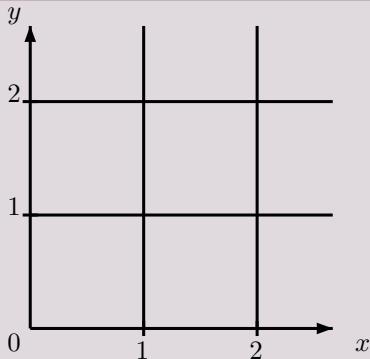
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

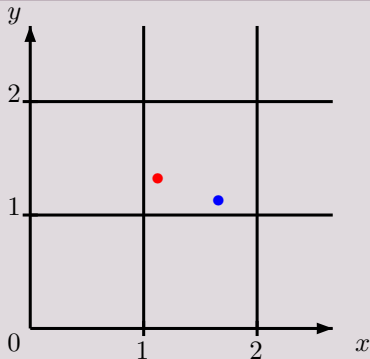
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

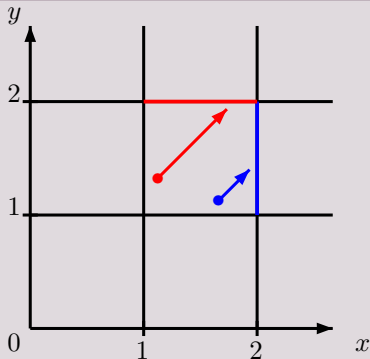
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

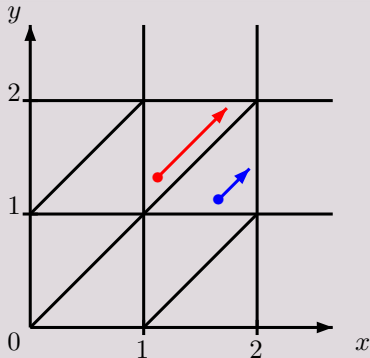
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

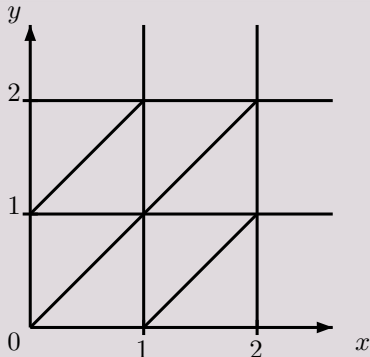
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

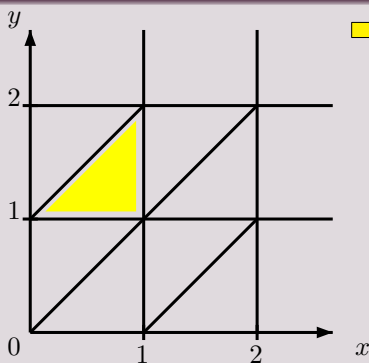
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

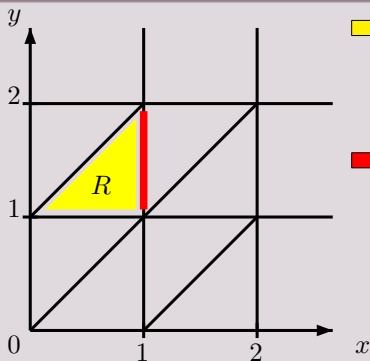
Motivation


Les régions


L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



 Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

 Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

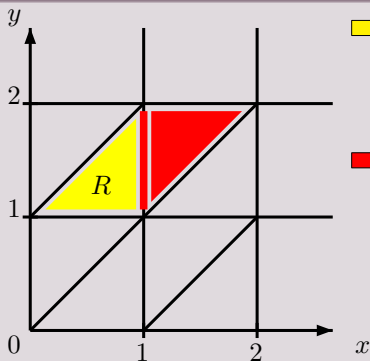
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

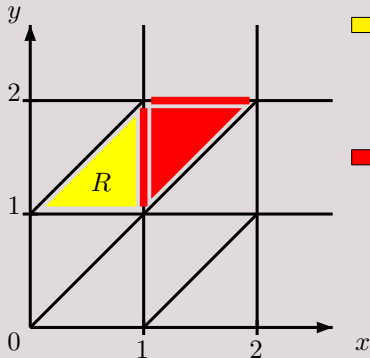
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

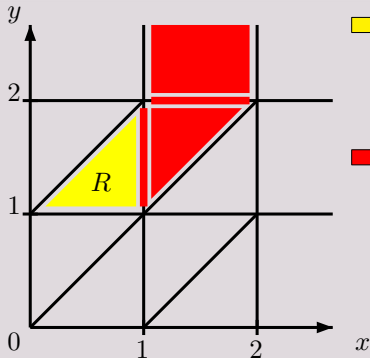
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- ▶ Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

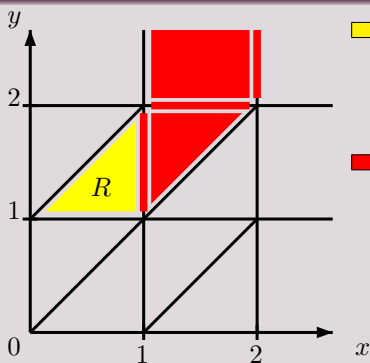
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

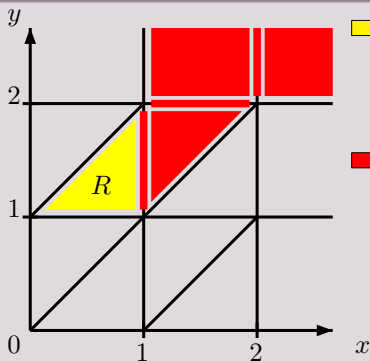
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Vue géométrique

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

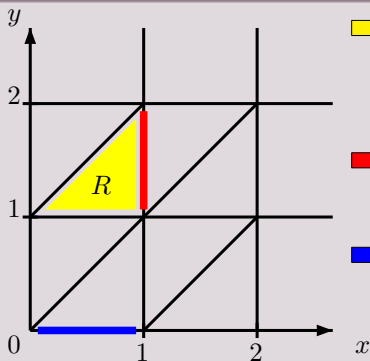
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple (avec deux horloges x et y , pour $m = 2$)



■ Région R définie par
 $I_x =]0; 1[$, $I_y =]1; 2[$
 $\text{frac}(x) > \text{frac}(y)$

■ Successeur de R pour le temps
 $I_x = [1; 1]$, $I_y =]1; 2[$

■ Successeur de R pour une action
avec $y := 0$
 $I_x =]0; 1[$, $I_y = [0; 0]$

- Compatibilité de valuations équivalentes avec les contraintes $x, y \bowtie k$
- Compatibilité de valuations équivalentes avec l'écoulement du temps

Construction de l'automate

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

Motivation
Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Définition

Automate des régions $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ pour l'automate temporisé $\mathcal{A} = (X, Q, q_0, \Delta, Inv)$, avec constante maximale m , quotient $\mathbb{R}_{\geq 0}^X / \sim$ noté $\mathcal{R}_{X,m}$.

- ▶ états $Q \times \mathcal{R}_{X,M}$
- ▶ transitions de délai (abstraites) : $(q, R) \xrightarrow{\leq} (q, succ(R))$
- ▶ transitions d'action : $(q, R) \xrightarrow{a} (q', R')$
s'il existe une transition $q \xrightarrow{g,a,r} q'$ de \mathcal{A} avec $R \models g$ et $R' = R[r \mapsto 0]$

Construction de l'automate

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

Motivation
Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Définition

Automate des régions $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ pour l'automate temporisé $\mathcal{A} = (X, Q, q_0, \Delta, Inv)$, avec constante maximale m , quotient $\mathbb{R}_{\geq 0}^X / \sim$ noté $\mathcal{R}_{X,m}$.

- ▶ états $Q \times \mathcal{R}_{X,M}$
- ▶ transitions de délai (abstraites) : $(q, R) \xrightarrow{\leq} (q, succ(R))$
- ▶ transitions d'action : $(q, R) \xrightarrow{a} (q', R')$
s'il existe une transition $q \xrightarrow{g,a,r} q'$ de \mathcal{A} avec $R \models g$ et $R' = R[r \mapsto 0]$

Remarque

La taille de $\mathcal{R}_{X,m}$ est en $\mathcal{O}(|X|! \cdot m^{|X|})$, à multiplier par $|Q|$.

Construction des configurations accessibles

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

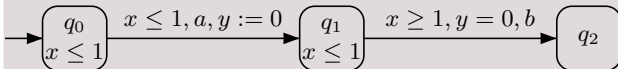
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple



Construction des configurations accessibles

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

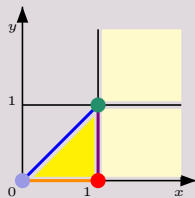
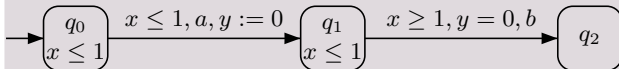
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple



Construction des configurations accessibles

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

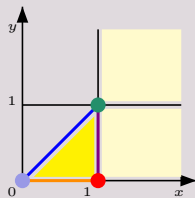
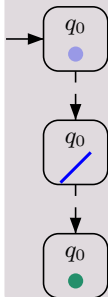
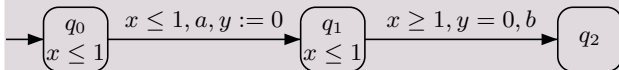
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple



Construction des configurations accessibles

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

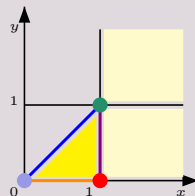
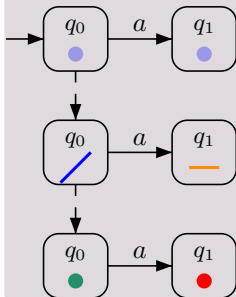
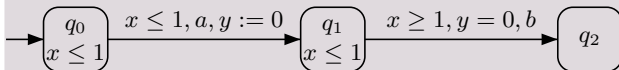
Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple



Construction des configurations accessibles

MoReC – MI045

Mathieu Sassolas
UPMC

6 mai 2010

Composition

L'abstraction des
régions

Motivation

Les régions

L'automate des
régions

Exemple

Exemple

