Texte dû à Philippe Etchecopar, du département de mathématiques de l'Université du Québec à Rimouski

L'infini en mathématiques

1. L'infini, des Grecs à Newton

L'infini est un des concepts que l'on utilise le plus souvent en mathématiques. Par exemple, on le retrouve en calcul différentiel et intégral pour définir les limites, la continuité, la convergence, etc. Il est présent également dans les nombres, dans la géométrie et dans bien d'autres branches des mathématiques. L'utilisation de ce concept est même devenue si courante, si banalisée, que l'on n'en perçoit plus la complexité. Pourtant, depuis l'Antiquité, la notion d'infini a été au cœur de la réflexion mathématique, philosophique et religieuse en Occident. À la fin du siècle dernier, la *mathématisation de l'infini* a été un des grands progrès des mathématiques modernes. L'utilisation quotidienne de ce concept en calcul différentiel et intégral ne devrait pas en masquer l'importance dans la science actuelle.

Comme nous l'avons vu dans un texte antérieur consacré à ce thème, le concept d'infini se retrouve dans d'autres disciplines et particulièrement en physique sous une forme à la fois proche et différente. Dans le texte qui suit, nous tenterons de présenter ce concept sous un angle plus mathématique.

Commençons par un bref aperçu historique

Pour les Grecs, car c'est en Grèce que tout a commencé, l'infini était un concept dérangeant. Il était au cœur de trois grandes questions que se posaient les philosophes de l'époque, qui sont aussi les premiers esprits scientifiques :

- L'infiniment grand : l'univers est-il borné ou s'étend-t-il à l'infini ?
- L'infiniment petit : la matière est-elle discrète, c'est-à-dire composée ultimement d'éléments insécables, les atomes, ou est-elle continue, c'est-à-dire divisible à l'infini ?
- L'infini du temps : l'Univers est-il apparu à un certain instant ou est-il éternel ?

Au début, vers 500 avant JC, deux écoles, celle des Ioniens, fondée par Thalès de Milet, et celle des Atomistes, surtout représentée par Démocrite, s'affrontaient sur ces sujets. Pour Anaximandre, par exemple, un Ionien, notre monde était fini et limité par une sorte de sphère percée d'ouvertures par lesquelles on pouvait apercevoir les étoiles. Au-delà s'étendait l'*Apeiron*, c'est-à-dire ce qui n'a pas de fin. Ainsi, l'Univers observable se tenait au sein d'une sorte de no man's land infini. Par contre, la matière était, elle, continue, c'est-à-dire divisible à l'infini.

Au contraire, pour les atomistes comme Démocrite et son maître Leucippe, la matière est alors ultimement composée d'atomes insécables séparés par du vide. Ils sont d'ailleurs les inventeurs de ce concept étonnant de « Vide ». La matière est donc discrète. Par ailleurs, pour les atomistes, les atomes sont en nombre infini et l'Univers est donc infini et contient une infinité de mondes comme le nôtre !

Puis Pythagore et Zénon, chacun à sa façon, allaient troubler durablement le monde grec avec l'infini. Le premier par la découverte des nombres irrationnels, le second par ses paradoxes. La première irruption dérangeante de l'infini chez les Grecs fut en effet la découverte des nombres irrationnels par Pythagore et son École. Les Grecs liaient encore les nombres à des grandeurs, les nombres rationnels étant alors associés à des rapports de grandeurs. À chaque nombre correspondait une grandeur et à chaque grandeur devait correspondre un nombre. Pythagore et ses disciples en étaient venus à interpréter le monde, de la musique au mouvement des planètes, par les nombres.

« Tout est nombre » était la devise de leur École. Or ils découvrirent que la diagonale d'un carré de coté 1 ne pouvait être associée à aucun nombre entier ni à aucun rapport de nombre entier ! La longueur existait, on la voyait, mais aucun nombre ne pouvait la mesurer. Le système de Pythagore était menacé d'effondrement.

Démontrons l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Nous allons utiliser la méthode de « preuve par l'absurde ». On suppose que ce que l'on veut démontrer est faux et on montre que cette supposition débouche sur une contradiction.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit rationnel et démontrons que cela aboutit à une contradiction. Si $\sqrt{2}$ est rationnel, il peut s'écrire sous la forme $\sqrt{2} \cong \frac{p}{q}$ où p et q sont irréductibles entre eux, c'est-à-dire ne sont pas simplifiables. En élevant au carré cette expression, nous obtenons :

$$2 \cong \frac{p^2}{q^2}, \text{ soit } p^2 \cong 2q^2 \qquad (1)$$

Nous constatons que p^2 est pair.

Donc p est pair. Le nombre p peut alors s'écrire sous la forme $p \cong 2k$. Nous avons alors $p^2 \cong 4k^2$. L'équation (1) s'écrit alors $4k^2 \cong 2q^2$, soit $2k^2 \cong q^2$. Le nombre q^2 est alors pair et il en est de même du nombre q pour les raisons que nous avons mentionnées précédemment.

Or, quand le carré d'un nombre est pair, cela implique que le nombre lui-même est pair. Car le carré d'un nombre impair est toujours impair : $(2n+1)^2 \cong 4n^2+4n+1$, qui est bien impair.

Or le nombre p était déjà pair. Si le nombre q l'est également, ils peuvent se simplifier par 2 et cela contredit l'hypothèse qu'ils sont irréductibles.

L'hypothèse $\sqrt{2} \cong \frac{p}{q}$ n'est donc pas valide et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

En fait on pouvait trouver des rapports de nombres qui s'approchaient de plus en plus, infiniment près de la longueur cherchée, mais qui ne l'atteignaient jamais. Pour la toute première fois, l'infini apparaissait dans le domaine de la géométrie, les nombres étant la porte d'entrée sur l'infini. L'Histoire, ou la légende, dit que le disciple de Pythagore qui a fait cette découverte a été noyé par ses amis pour que la nouvelle ne se répande pas!

Les paradoxes de Zénon allaient hanter les mathématiciens pendant près de deux mille ans. Pour Zénon et son école, la perfection devait être éternelle et immobile, le changement n'était qu'une illusion des sens et le mouvement était une impossibilité théorique. Pour le prouver, il proposa une série de paradoxes montrant que le mouvement était impensable, surtout si le temps et la matière étaient continus et divisibles à l'infini, comme le prétendaient Anaximandre et l'École de Milet. C'est dans ce but qu'il énonça le fameux paradoxe d'Achille et de la tortue : Achille ne pourra jamais rattraper la tortue. En effet si la tortue part avec un peu d'avance, Achille devra d'abord combler la moitié de la distance qui les sépare, puis la moitié de la distance qui reste et ainsi de suite jusqu'à l'infini, puisque la distance est divisible à l'infini… Si le temps et l'espace sont discrets, comme le prétendront après lui les Atomistes, Zénon propose le paradoxe du javelot pour montrer que là aussi, le mouvement est impossible. Le temps étant fait d'instants isolés, le javelot lancé ne peut atteindre la cible. À un instant isolé et sans durée, le javelot ne peut qu'être immobile !

Pour Zénon, le mouvement est théoriquement impossible et ce n'est donc qu'une illusion de nos sens. Ces paradoxes basés sur la division ou non à l'infini allaient traumatiser la pensée occidentale sur le concept de mouvement pendant près de deux mille ans ! La faille dans le raisonnement de Zénon, c'est que la série $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ est une série géométrique convergente dont la somme donne 1. Mais ce résultat mathématique n'allait être atteint que beaucoup plus tard. Qu'une somme infinie puisse donner une valeur finie était cependant impensable pour les penseurs grecs de l'époque.

Pour les Grecs, par exemple pour Aristote ou encore pour l'astronome Ptolémée, qui reprit et perfectionna sa conception de l'univers physique, le monde était un monde fini. Cette conception, adoptée par tout le Moyen-Âge, n'allait d'ailleurs être remise en cause que par Copernic, Kepler et Galilée deux mille ans plus tard. Leurs mathématiques, par exemple la célèbre géométrie d'Euclide, étaient aussi finies, à la mesure de l'homme. D'ailleurs, le maillon faible de cette géométrie, c'est le cinquième des postulats de base d'Euclide, celui qui présume du comportement des parallèles à l'infini[1]. Malgré quoi, Aristote avait tout de même proposé une distinction importante entre deux sortes d'infinis : *l'infini potentiel*, qu'il accepte, et *l'infini actuel*, qu'il rejette.

L'infini potentiel se définit négativement, comme étant quelque chose qui n'est pas fini, sans que l'on puisse en dire davantage. C'est celui des mathématiciens ou de la divisibilité théorique de la matière. Par exemple la suite des nombres entiers n'a pas de fin, car à tout nombre, aussi grand soit-il, nous pouvons toujours ajouter le nombre 1 et en obtenir un plus grand. Pour Aristote, ce type d'infini « ne se laisse pas parcourir et n'a pas de limite », il n'existe donc que « potentiellement ». C'est une première vision de l'infini.

L'infini actuel serait au contraire un concept autonome, existant comme tel, avec une définition et des propriétés qui lui seraient propres. Ce serait l'aboutissement d'une démarche d'abstraction propre aux mathématiques. Pour Aristote, et pour la plupart des philosophes et mathématiciens qui lui succéderont jusqu'au XVII^{e} siècle, ce concept ne peut exister dans notre univers. Dans le livre III de *La Physique,* Aristote écrit :

> *Un examen logique prouve que l'infini actuel n'existe pas : si en effet la définition du corps est : ce qui est limité par une surface, il n'y a pas de corps infini, ni intelligible, ni sensible.*

Si l'infini actuel existait comme tel, ses parties pourraient aussi être infinies et alors cela serait contradictoire avec l'axiome d'Euclide affirmant que le tout est plus grand qu'une de ses parties. La cause est entendue : l'infini actuel n'existe pas comme tel dans le monde des objets mathématiques ou physiques. Quant à l'infini potentiel, il est seulement la caractéristique de certains ensembles qui ne sont pas finis.

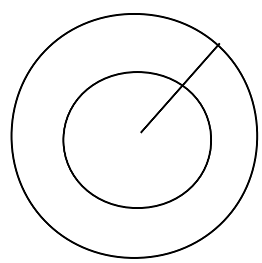
Dans l'Antiquité Archimède s'est approché de l'infini actuel. En cherchant à établir l'aire d'un cercle, il a calculé les aires des polygones inscrits et augmentant le nombre de côtés : plus le nombre de cotés augmente, plus l'aire du polygone se rapproche de celle du cercle. Cette méthode dite « d'exhaustion » qui sera repris près de vingt siècles plus tard lors de la découverte du calcul différentiel et intégral. Archimède n'avait pas raisonné en terme d'infini actuel en ce sens qu'il n'a pas dit que le cercle représentait la suite de polygones dont le nombre tend vers l'infini.

1 Voir à ce propos les textes sur les géométries euclidiennes et non-euclidiennes ou sur l'infini en physique.

Durant le Moyen-Âge, l'infini dans notre univers allait rester *potentiel* pour une raison supplémentaire : l'infini *actuel* ne pouvait être qu'un attribut de Dieu. En effet, pour l'Église chrétienne, monothéiste, et voulant justifier la toute-puissance de son Dieu, on pouvait assimiler ce dernier à l'infini. Définir Dieu comme étant ce qui était infini, donc ne pouvant être ni compris ni mesuré, cela présentait aussi l'avantage de rendre inutile, voire sacrilège toute réflexion sur son existence. Pour Thomas d’Acquin, qui a profondément marqué la pensée religieuse du Moyen Âge à aujourd’hui, penser l’infini est un péché d’orgueil.

La révolution scientifique des XVI^{e}-XVII^{e} siècles allait réintroduire l'infini, mais sur la pointe des pieds. Galilée n'a pas montré sur cette notion la même audace que sur d'autres aspects de la physique d'Aristote. Galilée constata que chaque nombre entier avait un seul carré et que chaque carré correspondait à un seul nombre entier, sa racine. Si l'infini existait, cela impliquerait que l'ensemble des nombres entiers avait le même nombre d’éléments que celui des carrés de nombres entiers, ce qui était impossible en vertu de l'axiome d'Euclide affirmant que le tout ne peut pas être égal à une de ses parties. La conclusion de Galilée fut que l'infini *actuel* ne pouvait exister. Il proposa un des nombreux paradoxes sur l’infini. Prenez deux cercles concentriques, un petit et un grand. Il semble évident qu’il y a davantage de points sur le grand que sur le petit. Or Galilée constate qu’en traçant un rayon du grand cercle, il coupe toujours le petit cercle, et qu’en prolongeant un rayon du petit cercle, il coupe également toujours le grand cercle. Cela signifie qu’à chaque point du grand correspond toujours un point du petit, et qu’à tout point du petit correspond toujours un point du grand.

Un rayon associe toujours un point d’un petit cercle à un point d’un grand cercle concentrique et réciproquement.



Galilée n’a pas eu la même audace intellectuelle sur l’infini que sur les places respectives de la Terre et du Soleil. Deux siècles plus tard les mathématiciens Bolzano et Cantor allaient justement définir l’infini potentiel sur la base de ces paradoxes !

Newton et Leibniz allaient être plus pragmatiques, mais pas beaucoup plus innovateurs. Dans les faits ils allaient utiliser l'infini *actuel* pour établir le calcul différentiel, et plus particulièrement les infiniment petits de Leibniz et les fluxions de Newton. En effet, les *fluxions* de Newton, représentent une vitesse instantanée, c’est-à-dire une distance *infiniment petite* divisée par un temps lui aussi *infiniment petit*. Ces quantités *infiniment petites* existaient dans un certain sens, mais pouvaient être considérées comme nulles par ailleurs. L'évêque Berkeley, gardien de l'orthodoxie catholique, allait souligner cette contradiction logique. Pour lui l'infini *actuel* était le propre de Dieu et de lui seul. Ce fut un débat jésuitique. Berkeley avait raison sur la logique du raisonnement tel qu'il se présentait à l'époque, mais la méthode de Newton avait un avantage décisif : elle marchait !

En fait, il fallut attendre les mathématiciens Bernard Bolzano et surtout Georges Cantor, au XIXe siècle, pour donner une base rigoureuse au concept d'infini.

2. La mathématisation de l'infini

Dans *Les paradoxes de l'infini*, Bolzano (1781-1848) allait d'abord affranchir la notion de l'infini *actuel* de celle de Dieu en la situant dans le champ du calcul et de la quantification plutôt que dans celui de la théologie. Pour cela, il partit de l’idée simple que quand on compare deux ensembles finis, pour qu’ils aient le même nombre d’éléments, on dit le même cardinal, cardinal étant le nombre d’éléments d’un ensemble, il suffit de pouvoir associer à chaque élément d’un ensemble un élément et un seul de l’autre et réciproquement. Il généralisa cette idée aux ensembles infinis : deux ensembles infinis sont égaux, en terme de nombre d’éléments, s'il est possible d'établir une correspondance *biunivoque* entre les éléments de ces deux ensembles, c'est-à-dire s'il est possible d'associer un élément du second ensemble à chaque élément du premier et réciproquement. Bolzano a ainsi utilisé une démarche typiquement mathématique : définir rigoureusement un concept aussi général et abstrait que possible, ici l’infini actuel, de façon à ce que l’utilisation de cette définition permette des raisonnements cohérents. Il ne s’agit donc pas de se demander ce que peut représenter cet infini actuel dans notre monde et l’évaluer selon un critère de vérité.

Cette définition a eu des conséquences contraires à l’intuition. En effet comparons l’ensemble des nombres entiers positifs, N, et celui des nombres pairs. À chaque nombre entier on peut associer un nombre pair et un seul, son double. Réciproquement, à chaque nombre pair on peut associer un nombre entier et un seul, sa moitié. Il existe donc une relation biunivoque entre les entiers et les nombres pairs, deux ensembles infinis. Selon la définition de Bolzano, ces deux ensembles ont le même nombre cardinal, ils ont la même infinité d’éléments. C’est peu intuitif car les nombres pairs sont inclus dans les entiers qui en plus incluent les nombres impairs ! En fait, la définition de l’infini implique qu’un ensemble infini peut avoir le même cardinal qu’une de ses parties, infinie elle aussi ! Ce résultat allait contre ce qui semblait être une évidence depuis Aristote.

On en retient que deux ensembles infinis ont la même infinité d’éléments si on trouve une bijection entre eux. Et c'est alors que Cantor prit le relais.

Au départ, les ensembles

Au XIXe, devant le développement anarchique des mathématiques et devant des résultats apparemment contradictoires qui apparaissaient, des mathématiciens, dont Cantor, décidèrent de mieux définir la base des mathématiques, d’où l’idée de commencer par le concept d’ensemble. C'est en élaborant la théorie des ensembles que Cantor fut amené à réfléchir sur l'infini. Il commença par définir un ensemble à partir d’un autre, l’ensemble des parties d’un ensemble. À partir d'un ensemble ayant par exemple n éléments, il est possible d'en construire un autre composé de toutes les parties possibles de celui-ci, et dont le nombre d'éléments sera $2n$. Prenons un ensemble $A=\{a, b\}$. Si nous construisons l'ensemble P(A) composé de tous les sous-ensembles possibles composés à partir des éléments de A, nous obtenons :

P(A) = {Ø, {a}, {b}, A}. Ø est l'ensemble vide. Le cardinal de P(A) est 4, c'est-à-dire 2^2.

À partir d'un ensemble, cette façon de définir un autre ensemble composé des sous-ensembles du premier n'a pas de fin, et la loi qui permet de calculer les cardinaux successifs est très simple.

Un premier infini « actuel », le cardinal de l'ensemble des nombres entier positifs N

Les nombres constituèrent la porte d'entrée principale pour l'étude de l'infini. En calcul, la suite des nombre entiers est probablement le premier contact que l'on a avec l'infini.

Cantor, d'emblée, affirma l'existence de l'infini actuel. Il osa ce que personne n'avait osé depuis Aristote : la suite des entiers positifs (0, 1, 2, 3, …) est infinie, l'ensemble des entiers positifs, ***N***, est donc un ensemble qui a une infinité d'éléments, alors il affirma que le cardinal de cet ensemble était un nombre qui existait comme tel sans que l'on utilise le symbole fourre-tout ∞, il l'appela $\cong_0$**.** Le symbole $\cong$ est la première lettre de l'alphabet hébreu et se prononce *aleph*, $\cong_0$ se prononce *aleph 0*. Il faut signaler que Cantor était un juif très croyant, ce qui le tourmentera durant toute sa réflexion sur l'infini. Cantor allait nommer ce nombre étrange, un nombre *transfini,* il représentait une quantité infinie.

> *L'acte décisif fut d'affirmer qu'il y a, après le fini, un transfini, c'est-à-dire une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature sont infinis, et qui cependant peuvent être précisés, tout comme le fini, par des nombres déterminés, bien définis et distinguables les uns des autres. (La Recherche, # 268, p. 908).*

En 1883, Cantor écrivit :

> *Ne pas simplement considérer l'infiniment grand sous la forme de ce qui croit sans limite,,, mais également le fixer de façon mathématique par des nombres, cette pensée s'est imposée à moi logiquement, presque contre ma volonté*.

Les ensembles infinis dénombrables, les rationnels *Q*

Cantor allait qualifier de *dénombrables*, tous les ensembles infinis qui sont équivalents à l'ensemble des entiers positifs. Tout ensemble pour lequel on peut établir une correspondance avec l'ensemble des entiers est dite dénombrable parce qu'on peut « énumérer » les éléments en désignant le premier, le second, le troisième, etc Par la méthode indiquée ci-dessous, Cantor démontra que l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres pouvant se mettre sous la forme de fractions de nombres entiers, a lui aussi $\cong$ comme cardinal, même si les nombres rationnels sont apparemment infiniment plus nombreux que les nombres entiers. Cantor a prouvé que l'ensemble **Q** des rationnels est dénombrable en donnant une façon de « lister » toutes les fractions représentant les nombres rationnels. Construisons le tableau ci-dessous :

N	**1**	**2**	**3**	**…**
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	**…**
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	**…**
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	**…**
÷	÷	÷	÷	**…**

On remarque que les fractions du tableau correspondent à tous les rationnels possibles, car les numérateurs correspondent aux entiers de la ligne du haut et les dénominateurs aux entiers de la colonne de gauche. Si on « tricote » le tableau par zig-zag, on peut énumérer tous les rationnels en une séquence continue $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \ldots$, séquence à laquelle on ajoute 0.

L'ensemble des rationnels, comme celui des entiers, est donc dénombrable puisque nous sommes capables de les énumérer dans un ordre où ils seront tous représentés, c'est-à-dire nous avons établi une bijection entre les entiers et les rationnels.

Pour prouver que les relatifs Z sont eux aussi dénombrables, c'est-à-dire relèvent du même infini que celui des entiers N, définissons directement une bijection entre N et Z,

Soit la fonction f de N dans Z définie de la façon suivante définie selon qu'elle s'applique à un nombre pair ou à un nombre impair :

$$\left| \begin{array}{l} f(2n) = n \\ f(2n+1) = -(n+1) \end{array} \right.$$

Pour les premières valeurs $(n, f(n))$, nous obtenons (0, 0), (1, –1), (2, 1), (3, –2), (4, 2), etc. Nous constatons qu'à chaque entier de N la fonction associe un et un seul relatif et inversement, autrement dit nous avons attribué un numéro et un seul à chaque nombre relatif de Z. Ici aussi nous constatons que, contre le bon sens, il y a autant de nombres entiers que relatifs même si les relatifs semblent deux fois plus nombreux !

À partir de ce qui précède, Cantor établit les règles de calcul suivantes sur les cardinaux :

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

En effet tout ensemble infini dont on peut « numéroter » les éléments avec les nombres entiers est dénombrable, ce qui est le cas de $\aleph_0 + 1$, $\aleph_0 + \aleph_0$ et $\aleph_0^2$ Comme vous le remarquez, ces règles ne sont pas intuitives !

Nous voyons ici la spécificité de la démarche mathématique :à partir d'un objet ou d'une idée commune, ici la sensation d'infini que donne la suite des nombres, les mathématiques en font un concept abstrait et général rigoureusement défini. sur lequel on définit des règles de calcul et on établit des structures.

Après ce premier coup d'audace allant à l'encontre de la plupart des idées reçues depuis plus de deux mille ans, Cantor allait poursuivre sur sa lancée et permettre de distinguer plusieurs sortes d'infinis.

Une infinité d'ensembles infinis *non dénombrables* les irrationnels et les réels

À la suite de sa définition d'équipotence des ensembles par l'existence d'une bijection entre eux, Cantor allait aussi établir une hiérarchie entre les ensembles infinis pour lesquels il n'existe pas une telle équipotence.

Retrouvons les rationnels qui avaient tant traumatisés les Grecs. Les irrationnels sont des nombres que l'on ne peut pas mettre sous forme d'un quotient de deux entiers. Sous forme décimale, ce sont des nombres dont la suite des chiffres après la virgule n'est pas périodique, tandis que dans le cas des rationnels, sous forme décimale, la même séquence de chiffres revient régulièrement. Une propriété curieuse des irrationnels est qu'on ne peut les nommer : il faudrait pouvoir énumérer l'infinité de chiffres qui les définit ! En fait les deux irrationnels les plus cités sont ≅ et $\sqrt{2}$ Et pourtant ils sont infiniment plus nombreux que les rationnels… Pour s'en convaincre intuitivement, partons de ≅. Il est définit par la suite dont tout le monde connaît le début : 3,1416…. Suit une infinité de chiffres où n'apparaît aucune régularité. Il suffirait, dans cette suite infinie, de supprimer un seul chiffre pour avoir un autre irrationnel. Imaginez tous les irrationnels que l'on pourrait définir seulement à partir de ≅ : intervertir deux, trois ou davantage de chiffres, en ajouter un deux ou trois n'importe où… On pourrait en faire tout autant à partir de n'importe quel irrationnel ainsi obtenu *: L'homme se lassera plus vite d'imaginer que la nature de fournir* comme disait Pascal ! Les nombres réels, quant à eux, incluent toutes les catégories de nombres. L'ensemble des réels est représenté par la droite où « les points successifs se touchent »[2]. Par une démonstration subtile[3], Cantor prouve qu'il n'y a pas de bijection entre les nombres entiers et les nombres réels. Ainsi, il établit qu'il y avait au moins deux sortes d'infinis.

Pour prouver que les réels et les entiers n'étaient pas du même ordre d'infini, soit ≅$_{0,}$ Cantor devait démontrer qu'il était impossible d'établir une règle permettant d'avoir une liste des nombres réels indiciée sur les entiers, comme il l'a fait pour les rationnels. Il a raisonné par l'absurde. Pour prouver qu'il était impossible d'établir une règle permettant de « lister » les nombres réels de l'intervalle ≅0,1≅, il a supposé qu'une telle liste existait et qu'elle débutait par les nombres ci-dessous :

0,24375892……

0,65820189…..

0,91302547…

………

Cette liste est infinie, mais supposons qu'elle renferme tous les nombres réels de l'intervalle ≅0,1≅. Il faut maintenant prouver que c'est impossible. Pour le prouver, il suffit de trouver un seul nombre qui ne puisse pas être sur cette liste, Soit *X* ce nombre et voici comment Cantor l'a composé :

- *Comme première décimale de* X*, prenons n'importe quel nombre sauf la première décimale du premier nombre ;*
- *Comme seconde décimale de* X*, prenons n'importe quel nombre sauf la seconde décimale du second nombre ;*
- *Comme troisième décimale de* X*, prenons n'importe quel nombre sauf la troisième décimale du troisième nombre ;*

Et ainsi de suite.

Comme *X* est réel (aucune période dans son développement décimal) et qu'il est différent de chacun des éléments de cette liste, alors *X* ne peut appartenir à celle-ci. Ce qui prouve que cette liste n'existe pas.

Nous nous sommes limités à l'intervalle ≅0,1≅ et le résultat se généralise à l'ensemble **R** des nombres réels.

[2] Voir Les paysages du cours NYA

[3] Voir *La Recherche*, 1994, p. 209.

Cantor établissait ainsi deux grandeurs d'infinis : celle des ensembles pour lesquels nous avons une règle d'énumération et que l'on dit *dénombrables* et celle des réels pour lesquels il n'y a pas de règle d'énumération et que l'on dit *non-dénombrable*.

Que les nombres réels soient d'un infini supérieur à celui des entiers amène des conséquences curieuses. Par exemple, si vous prenez deux nombres rationnels aussi proches que vous le désirez, il y aura toujours entre eux une infinité de nombres irrationnels. Par ailleurs, entre deux nombres irrationnels, il y a aussi une infinité de nombres rationnels. Mais comme les irrationnels sont d'un infini supérieur, si vous prenez un point au hasard sur une droite graduée, vous n'avez absolument aucune chance de tomber sur un nombre rationnel, vous aurez un irrationnel avec une probabilité égale à 1 !

Autre façon de dire la même chose. Prenez une règle graduée. L'infini des graduations entre les unités, aussi détaillées que vous les preniez, est du même ordre que celui des graduations elles-mêmes. Les graduations entre les unités étant des nombres rationnels, prenez deux graduations aussi proches que possible, alors il y aura entre elles une infinité de nombres irrationnels. Mieux, cette infinité de nombres irrationnels sera infiniment plus grande que l'infinité de ces graduations de moins l'infini à plus l'infini !

Pour mieux sensibiliser à l'immense différence entre l'infini du dénombrable (entiers, relatifs ou rationnels) et celui du continu (les réels), Paul Coteau, dans *Les rêves de l'infini*, a pris l'exemple du seau percé. Imaginons un seau dont le fond est un carré de coté 1 que l'on peut décrire par la surface définie par $\{(x, y) \mid x \in R, y \in R, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Perçons maintenant ce fond en tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels. Il y en a une infinité, le fond du seau aura donc une infinité de trous. Pourtant, si on remplit le seau d'eau, pas une goutte d'eau ne s'écoulera. Les couples de nombres rationnels, les trous, sont si peu nombreux par rapport aux couples de nombres irrationnels, que la surface totale de cette infinité de trous est nulle! Par contre si nous perçons ce fond en tous les points définis par un couple de nombres irrationnels, leur infinité est si grande que le contenu du seau s'écoulera instantanément comme si il n'y avait pas de fond !

Cette distinction entre l'infini dénombrable, discret, des nombres entiers et celui non dénombrable, continu, des nombres réels est essentielle dans l'Histoire des mathématiques au XXe siècle. La grande question que Cantor s'est posée, et à laquelle il n'a pu trouver de réponse, c'est de savoir si entre ces deux infinis, il pouvait en exister un troisième. L'infini des entiers est Cantor y perdit la raison et c'est Gödel qui, en 1932, y apporta une réponse vertigineuse sur laquelle nous reviendrons.

Soulignons que la conception mathématique de l'infini est particulièrement puissante, bien plus puissante que ce que nous pouvons percevoir d'infini dans le monde physique, comme le nombre de particules contenues dans l'Univers (10^{80} environ) ou les dimensions de celui-ci exprimées en centimètres (2×10^{23} environ pour le rayon). En mathématiques, nous avons vu qu'il y avait au moins deux sortes d'infinis, celui correspondant aux entiers **N**, le dénombrable, et celui correspondant aux irrationnels ou aux réels, le non-dénombrable ou *continu*. Pour avoir une idée intuitive de l'infini des irrationnels ou réels, prenons le nombre π. Sous forme décimale, nous avons vu que ce nombre était constitué d'un développement infini de chiffres sans qu'aucune période n'apparaisse. Pour concevoir ce que peut représenter cette infinité de chiffres, associons tout couple de chiffres à une lettre. Par exemple 00 pour *a*, 01 pour *b*, etc. En choisissant des lettres, chiffres et symboles pour les cent couples de 00 à 99, la suite des chiffres du développement décimal de π se traduit par une suite de lettres, donc par une sorte de texte qui se déroule à l'infini. La mesure de cet infini est si *grande*, que dans ce texte figure certainement votre nom, puis votre nom avec votre date de naissance et celle de votre mort. En fait, toujours dans la suite de π vous trouverez une infinité de dates possibles pour votre naissance et votre mort. Vous trouverez aussi l'histoire de votre vie… à condition que vous ayez infiniment de temps pour la lire! Cet infini est si grand aussi, que vous trouverez même une infinité de versions de votre vie, dans toutes les langues existantes… Sans compter toutes les histoires de votre vie avec toutes sortes d'épisodes imaginées par ≅! En fait ce sera la même chose pour toutes les personnes qui ont déjà vécues ou qui restent à naître ou qui resteront des personnages imaginaires! Mais dans ≅ on ne trouvera pas seulement des biographies. On y trouverait en plus toutes les œuvres déjà écrites et même celles qui restent à écrire! Toutes les bibliothèques du monde sont dans ≅. On peut maintenant imaginer l'infinité des nombres irrationnels : il suffit dans le développement de ≅ d'enlever un seul nombre, ou d'en ajouter un seul, pour obtenir un nouveau nombre irrationnel! Et on peut recommencer cette opération avec n'importe quel nombre irrationnel…

Un mathématicien évaluait que si on laissait un singe taper au hasard sur un clavier, il finirait, après un long délai il est vrai, par reproduire les œuvres complètes de Shakespeare! Antonio Fischetti calculait les possibilités d'obtenir le récit de sa vie dans les décimales d'un nombre irrationnel[4].

> *En comptant 3000 caractères par page et pour chaque caractère une trentaine de possibilités (26 lettres, l'espace blanc et quelques signes de ponctuations) on obtient 30^{300000} combinaisons pour un livre de cent pages! Comment concevoir une telle quantité, lorsqu'on sait que la taille de l'Univers observable ne dépasse pas 10^{28} m. et que le nombre de secondes écoulées depuis la création de l'univers, il y a 15 milliards d'années, ne dépasse pas 10^{20}? L'homme parti à la recherche de sa vie a donc peu de chances de dénicher cet ouvrage, qui ne raconterait d'ailleurs qu'une longue errance. Même le nombre de phases de 80 caractères, 30^{80}, qu'il est possible d'écrire, dépasse celui d'atomes dans l'Univers (10^{80})*

On peut alors percevoir intuitivement que l'infinité des nombres irrationnels, celle du non dénombrables, est infiniment plus grande que l'infinité des nombres entiers, celle du dénombrable.

Mais en mathématiques, l'infini étant un concept, tout nombre, aussi immense puisse-t-il nous paraître, n'est rien devant l'infini. Pour les grecs la frontière entre un nombre immense et l'infini était un peu floue. Encore une fois les mathématiques est formée de concepts qui doivent être bien définis et aussi généraux que possible. On ne leur demande pas d'être validée par notre expérience quotidienne !

Un autre résultat trouvé par Cantor fut encore plus étonnant : il prouva que le nombre de points d'un carré était du même ordre d'infini que celui des points d'un seul coté ! Il étendit ce résultat à un cube de l'espace puis à un cube de l'espace à *n* dimensions! Il écrivit alors à son ami Dedekind : « Je le vois mais je ne le crois pas »!

L'hypothèse du continu

Comme chaque nombre réel peut s'écrire, sous forme décimale, comme une suite infinie de nombres entiers, l'ensemble des nombres réels équivaut à tous les sous-ensembles possibles de nombres entiers. Ayant de la suite dans les idées, Cantor nomma ce cardinal C, pour puissance du continu.

Comme Cantor a prouvé qu'il y avait plusieurs infinis possibles et que le premier était ü 0, nous pouvons ensuite imaginer de poursuivre le raisonnement et d'obtenir la suite, infinie bien sûr, des nombres transfinis : ü 0, ü 1, ü 2, ... Comment se situe alors ce cardinal du continu par rapport à cette suite de nombres transfinis aleph?

[4] Sciences et avenir, mars 1996

Or nous savons que si un ensemble A possède n éléments on peut construire à partir de A un ensemble $P\,A$ qui comporte 2n éléments. Ainsi l'ensemble formé des parties de N possède $2^{\cong_0}$ éléments.

Le cardinal de l'ensemble des nombres entiers est ü 0. Le cardinal de l'ensemble des nombres réels est 2ü 0. Nous pouvons nous demander s'il existe un cardinal compris entre ü   et 2ü 0. Autrement dit, existe-t-il un ensemble infiniment grand qui serait intermédiaire entre l'ensemble des nombres entiers et l'ensemble des réels ? Cantor s'est, bien sûr, posé la question. Il se proposait de démontrer qu'il n'y en a pas et que l'on a bien l'égalité $\cong_1 \cong 2^{\cong_0}$, selon la loi qui donne le nombre d'éléments de l'ensemble que l'on peut obtenir à partir de tous les sous-ensembles d'un ensemble.

Le reste de sa vie, Cantor essaya, en vain, de démontrer ce résultat que l'on nomma l'hypothèse du continu. Il n'y réussit pas et sombra dans la folie. Il faut dire que ses recherches sur l'infini avaient soulevées des passions et qu'il était violemment et personnellement attaqué par d'autres mathématiciens. C'est que la question de l'infini actuel recoupait celle de Dieu et de la capacité de l'homme, avec ses moyens limités, de maîtriser l'infini. C'était le péché d'orgueil de St Thomas d'Aquin. Il faut dire que Cantor lui-même était très religieux et qu'il était hanté par l'aspect un peu sacrilège que ses recherches sur l'infini pouvaient avoir. Au point qu'au fil de ses dépressions, il se mit à parler à Dieu en personne! Comme il le disait : « La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un ensemble infini, et son immense bonté le conduit à le créer ».

En 1900, au Congrès international des mathématiciens, Hilbert (1862-1943) estima que l'hypothèse du continu était l'un des 23 problèmes majeurs qui devraient être résolus au XXe siècle.

Ce problème se résolut de façon surprenante. D'abord, en 1938, un des plus grands logiciens de notre époque, Kurt Gödel, démontra que l'hypothèse de Cantor n'était pas réfutable, c'est-à-dire qu'on ne pourrait jamais démontrer qu'elle était fausse. Puis en 1963, le mathématicien américain Paul Cohen boucla la boucle. Il démontra qu'on ne pourrait jamais non plus démontrer qu'elle était vraie !!! Dans Initiation à la philosophie des sciences, Bruno Jarrosson conclut que Cantor avait perdu la raison à chercher une solution qui ne pouvait exister !

Revenons à suite des transfinis, les alephs. Cette suite infinie de nombres transfinis peut, à son tour, engendrer une autre catégorie de cardinaux, les trans-transfinis, on peut reprendre sur la suite des transfinis le raisonnement effectué sur les entiers et ainsi de suite. Ian Stewart (1989, p. 66) signale le paradoxe suivant :

> *Considérons le cardinal de l'ensemble de tous les cardinaux : il est nécessairement plus grand que tous les cardinaux, y compris lui-même !*

Ce paradoxe ressemble à celui soulevé par Russell sur l'ensemble de tous les ensembles et, pour le neutraliser, il a fallu apporter une restriction à la notion d'ensemble.

Les ordinaux

Les nombres cardinaux indiquent le nombre d'éléments d'un ensemble. Cantor a aussi découvert les nombres ordinaux. L'idée de base c'est que les nombres, quels qu'ils soient, sont *ordonnés*[5].

La suite des ordinaux est une continuation de la suite des entiers 0<1<2<3… Elle se construit en respectant la règle suivante : « Dans n'importe quel ensemble d'ordinaux non vide, il existe un ordinal qui est le plus petit ». Cette propriété qui est vraie pour les entiers ne l'est pas pour les réels.

[5] Patrick Dehornoy, Pour La Science, décembre 2000

Considérons, par exemple, l'ensemble des entiers « strictement compris entre 0 et 15 ». Le plus petit entier qui possède cette propriété est 1. Mais quel est le plus petit réel? 0,001? Non car 0,00001 lui est inférieur, etc. Il n'existe donc as de plus petit réel qui vérifie cette propriété.

Considérons maintenant l'ensemble des ordinaux infinis, c'est-à-dire ceux qui sont plus grands que tous les entiers. Dans cet ensemble, comme dans tout ensemble d'ordinaux, il existe un plus petit ordinal que l'on appelle $\cong$: on a alors $0<1<2<3<\ldots<\cong$.

De même il existe un plus petit ordinal plus grand que $\cong$ noté $\cong+1$, suivi par $\cong+2$, $\cong+3$, etc, jusqu'au plus petit $\cong$ plus grand que les $\cong+n$ quel que soit n. Ce dernier est appelé $\cong+\cong$, ou encore $2\cong$.

Ensuite viennent $2\cong+1$, $2\cong+2$, …, puis $3\cong$,…, $n\cong$. Puis après ceux-ci $\cong.\cong$ qu'on note aussi $\cong^2$. Puis $\cong^3,\ldots,\cong^n$ et, au-delà, $\cong^{\cong}$ et beaucoup plus loin $\cong^{\cong^{\cong}}$, etc : la construction se poursuit sans fin, à l'infini !

L'infini et le calcul différentiel et intégral

Jusqu'à maintenant c'est au niveau des nombres que nous avons rencontré l'infini. En fait l'infini est présent dans la plupart des branches mathématiques, particulièrement dans le calcul différentiel et intégral. Prenons quelques exemples simples.

Les suites et les séries

Suite aux paradoxes de Zénon, on tombe sur la somme suivante, qui est une série géométrique :

$$S \cong 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \ldots \quad \frac{1}{2^n} \quad \ldots$$

Au XVII[e] un moine démontre que l'on peut calculer la somme même s'il y a une infinité de termes : cette somme vaut exactement 1

Au XVIII[e], avec le développement du calcul différentiel et intégral, le calcul des séries prit beaucoup d'ampleur, mais la rigueur n'était pas encore au rendez-vous : les mathématiciens ne se préoccupaient pas beaucoup de la convergence, autrement dit les conditions pour lesquelles cette somme pouvait, ou non exister. Un bon exemple est le cas ci-dessous :

$$S \cong \tilde{1} \quad 1 \quad \tilde{1} \quad 1 \quad \ldots.$$

À première vue le résultat semble dépendre de la façon dont on présente cette série :

Si on ordonne cette addition infinie de la façon ci-dessous, on obtient 1:

$$\begin{aligned} S &\cong \tilde{1} \quad \tilde{1} \quad 1 \quad \tilde{1} \quad 1 \quad \tilde{1} \quad 1 \ldots. \\ &\cong \tilde{1} \quad \tilde{0} \quad 0\ldots \cong 1 \end{aligned},$$

Mais si on ordonne cette addition infinie de la façon ci-dessous, on obtient 0:

$$\begin{aligned} S &\cong \tilde{1} \quad 1 \quad \tilde{1} \quad 1 \quad \tilde{1} \quad 1 \ldots. \\ &\cong \tilde{0} \quad \tilde{0} \quad 0\ldots \cong 1 \end{aligned},$$

On arriverait au résultat paradoxal 1=0!

Euler, un des grands génies en mathématiques et un bourreau de travail (il écrivit plus de 80000 pages à la plume d'oie et eu une douzaine d'enfants) proposa la réponse plus subtile suivante :

On peut aussi regrouper les termes de la façon ci-dessous :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$
$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...)$$

Donc

$$S = 1 - S$$

Soit :

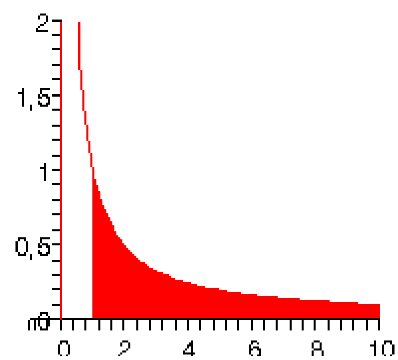
$$2S = 1$$
$$S = \frac{1}{2}$$

Résultat étonnant car une somme, infinie il est vrai, de nombres entiers, donnerait une fraction irréductible ! En fait les critères de convergence, à peine découverts à l'époque, montrent que cette série est divergente.

Une autre leçon à retenir, c'est que les règles de calcul dans des cas finis ne se retrouvent plus dès que l'infini entre en jeu. Les résultats nous semblent alors paradoxaux car nous sommes trop habitués à notre univers mental fini. En effet si la somme $S = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ a un nombre fini de terme, le résultat est indiscutable : $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

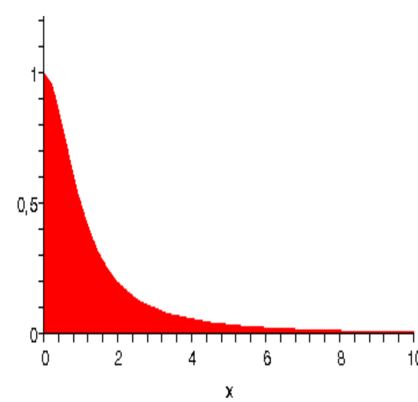
Des intégrales

On retrouve des résultats similaires dans le calcul intégral.



Représentons d'abord l'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{x}$, x=1 et l'axe des x. Nous obtenons la figure ci-contre :

Cette aire n'est pas limitée, la courbe ne rejoignant jamais l'axe des x et l'intégrale donne $\int_1^\infty \frac{1}{x} = \infty$ L'aire est infinie.



Représentons ensuite l'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{x^2+1}$, x=0 et l'axe des x. Nous obtenons la figure ci-contre

Cette aire n'est pas limitée, la courbe ne rejoignant elle aussi jamais l'axe des x et l'intégrale donne $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. L'aire est finie, une aire illimitée est finie et très précisément évaluée !

L’analyse non standard

Nous savons que le développement du calcul différentiel s’était fait autour de l’idée des infiniment petits. Newton et Leibniz, chacun à sa manière, avaient dû utiliser cette idée pour une première tentative de définition de la dérivée, que ce soit sous la forme d’une vitesse instantanée (vitesse moyenne sur une distance infiniment petite) ou de la pente d’une tangente (pente d’une sécante entre deux points infiniment rapprochés). Nous avons vu comment cette idée d’infiniment petit s’était avérée trompeuse et comment il avait fallu l’éliminer au profit de celle de limite pour en arriver à une définition rigoureuse de la dérivée.

En effet il est impossible de définir un infiniment petit en terme d’ordre de grandeur. Quelque longueur très petite que l’on prenne, elle restera très grande par rapport à une autre valeur encore beaucoup plus petite. Par exemple, un millionième de centimètre, ça ne semble pas long, mais ça le devient par rapport à un milliardième de centimètre !

En dehors de toute valeur numérique, le principe de récurrence empêche toute frontière entre très petit et très grand : en multipliant par 2 un nombre aussi petit soit-il, on finit toujours par obtenir des nombres très grands. Ce principe de récurrence étant à base de la construction des entiers naturels, on ne peut l’ignorer.

En ayant recours au concept de limite défini par Weierstrass, on a pu définir le calcul différentiel en contournant le problème des infiniment petits. Pourtant la question restait posée : est-il possible d’imaginer des nombres qui soient infiniment petits et pas seulement très petits ? Comment imaginer une frontière étanche entre ces deux catégories, frontière qui serait infranchissable, même avec le principe de récurrence ?

En 1960, le mathématicien Abraham Robinson eut l’idée de « compléter » les nombres réels avec une nouvelle catégorie de nombres, pour obtenir les hyperréels !

Nous avons vu, dans l’histoire du calcul différentiel, que l’idée de nombre s’était petit à petit dégagée de son origine très concrète (compter des cailloux avec les doigts de la main) pour, progressivement, devenir de plus en plus abstraite avec les nombre négatifs, puis les nombres complexes, les nombres rationnels, puis les réels, etc. Il était quand même possible de ramener chacune de ces catégories à un aspect concret, au moins jusqu’aux transfinis de Cantor.

La théorie des ensembles permet d’aller plus loin. Pour « exister », un objet mathématique n’a besoin que d’être rigoureusement défini selon des axiomes précis. C’est la cohérence qui compte, et non une quelconque correspondance avec une expérience concrète.

Pour Robinson, les nombres réels bien connus, des infiniment grands aux infiniment petits en passant par tous les nombres intermédiaires, étaient, en quelque sorte « à la mesure de l’homme ». Le principe de récurrence permettait de tous les définir. Il a donc imaginé une catégorie de nombre radicalement hors de portée de la récurrence.

Aux nombres réels habituels dits « appréciables », Robinson ajoute des nombres dits « très petits » et « très grands ». Un nombre très petit (tp) est défini de la façon suivante :

Un nombre positif a sera dit très petit, si pour tout nombre positif réel x on a $a<x$.

Comme x peut être un nombre réel aussi petit que l’on veut, il est clair que le nombre très petit a sera d’une nature différente !

Quand à un nombre « très grand », c'est tout simplement l'inverse d'un très petit ! Cette définition de Robinson, cohérente avec des axiomes de la théorie des ensembles, se traduit par des nouvelles règles de calcul entre ces différentes catégories de nombres. En voici quelques-unes :

tp+tp=tp app+app=app tg+tg=tg
tp+app=app app+app=app app+tg=tg

Évidemment le produit tpXtg n'est pas défini !

On retrouve des règles équivalentes pour le produit, comme tpXtp=tp, tpXapp=tp, etc. Ces règles de calcul sont à comparer aux règles de calcul sur les alephs de Cantor.

André Deledicq cite quelques propriétés surprenantes comme :

> *Il n'existe pas de frontière définissable entre les nombres tp et les nombres non-tp. Il n'en existe pas non plus entre les nombres non-tg et les nombres tg.*
>
> *Pour changer d'ordre de grandeur par étapes très petites, il faut un nombre d'étapes très grand !*

Les nombres non standards sont une bonne illustration de la capacité d'abstraction des mathématiques. Il ne s'agit pas de se demander ce qu'ils représentent selon notre perception, mais plutôt si leur définition et les propriétés qui en découlent sont cohérentes.

Leur définition montre à quel point la notion d'infiniment petit (ou d'infiniment grand) est floue !

Les conceptions des mathématiques

Les travaux de Cantor sur l'infini allaient profondément diviser les mathématiciens. Une majorité, à la suite de Hilbert, évalua que la maîtrise de l'infini par Cantor représentait une avancée majeure des mathématiques. D'autres, au contraire évalua que, comme le disait Poincaré, ce n'était que du brouillard sur du brouillard. Pour ces mathématiciens l'infini était hors de portée des hommes dont les capacités sont finies. Un mathématicien hollandais, Brouwer, proposa même de construire les mathématiques sans tenir compte de l'infini !

Le débat dure encore !

Les mathématiciens devant l'infini

L'infini n'a jamais laissé les mathématiciens indifférents. Certains, comme Pascal au XVII^{e} siècle, éprouvent une angoisse religieuse :

> *Je vois ces effroyables espaces de l'univers qui m'enferment et je me trouve attaché à un coin de cette vaste étendue, sans que je sache pourquoi je suis plutôt placé en ce lieu qu'en un autre, ni pourquoi ce peu de temps qui m'est donné à vivre, m'est assigné à ce point plutôt qu'à un autre de toute l'éternité qui m'a précédé et de toute celle qui me suit. Je ne vois que des infinités de toutes parts qui m'enferment comme un atome et comme une ombre qui ne dure qu'un instant sans retour. » (Les Pensées)*

Et Pascal écrit encore :

> *Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout, infiniment éloigné de comprendre les extrêmes. » (Les Pensées)*

Leibniz reproche à Pascal ses élans mystiques, invente la dérivée et utilise l'infini potentiel pour les calculs, mais, en théorie, réserve l'infini en acte pour Dieu.

Pour leur part, les contemporains de Cantor étaient très partagés sur ses tentatives pour définir un infini actuel. Par exemple le mathématicien Kronecker, qui disait que « Dieu a inventé les nombres entiers et les hommes le reste », a toute sa vie critiqué violemment l'œuvre de Cantor au point de le faire sombrer dans des dépressions nerveuses. Poincaré, pourtant innovateur dans d'autres domaines, disait que les théories de Cantor étaient une maladie dont on peut réchapper. Weyl disait pour sa part que l'infini des infinis de Cantor était « du brouillard sur du brouillard. »

D'autres avaient un avis radicalement opposé. Hilbert déclara en 1925 : « Personne ne pourra plus nous chasser du paradis que Cantor a créé », tandis que le mathématicien et philosophe anglais Bertrand Russell qualifia les découvertes de Cantor de « produit le plus étonnant jamais engendré par la pensée mathématique. »

Que conclure ?

Pour Ian Stewart, « les fruits de l'œuvre de Cantor sont à la base de toutes les mathématiques. » Mais Hourya Sinaceur constate que l'on assiste aujourd'hui à un retour de l'infini potentiel, probablement sous l'influence des techniques de calcul « finitistes », « itérées » ou « récurrentes » développées avec l'avènement de l'informatique.

Il semble que l'infini soit un concept avec lequel l'imagination propre au cerveau humain est beaucoup plus à l'aise que la capacité de calcul des ordinateurs...

3. Bibliographie

L'univers mathématique. Philip Davis et Reuben Hersh, Gauthier-Villars, 1985, 405 p.

Dans cette présentation particulièrement bien faite de l'univers mathématique, la notion d'infini est d'abord présentée, page 144, comme étant *La corne d'abondance* des mathématiques. Les auteurs décrivent brièvement quelques-unes des façons dont la question de l'infini s'est posée, de Zénon à Cantor. Dans le chapitre 5, *Morceaux choisis en mathématiques*, ils reviennent plus en détail sur les travaux de Cantor et plus particulièrement sur l'hypothèse du continu. Le procédé diagonal de Cantor est également résumé, mais sous une forme un peu obscure pour un non-initié. La présentation qu'en fait Hourya Sinaceur dans *La Recherche* est beaucoup plus compréhensible. Un autre aspect de l'infini, les infiniment petits utilisés en analyse, sont bien expliqués dans les morceaux choisis sous le titre *Analyse non standard*.

Ce livre, plein d'humour, est particulièrement facile à lire.

Les mathématiques. Ian Stewart, Collection Pour la Science, Paris, Belin, 1989, 266 p.

Le livre de Ian Stewart est un autre exemple de très bonne vulgarisation, ce qui n'est pas étonnant, l'auteur, Ian Stewart étant le chroniqueur mathématique de la revue *Scientific American* et de son équivalent français, *Pour la Science*. Dans son livre, Stewart donne une vue d'ensemble des mathématiques à travers une vingtaine de thèmes majeurs. Deux de ces thèmes portent sur l'infini. Le premier est intitulé *La corne d'abondance*, page 60, et Stewart reconnaît avoir repris ce titre de Reuben et Hersh tant il lui semblait approprié pour présenter cette notion. Stewart décrit surtout les résultats de Cantor et l'hypothèse du continu. Pour introduire les nombres transfinis de Cantor, il recourt à l'image très explicite connue sous le nom de *L'hôtel de Hilbert*. Le thème suivant est intitulé *Le fantôme des chers disparus* et porte sur un autre aspect de l'infini : les infiniment petits utilisés par Newton et Leibniz pour définir la dérivée. En résumant la polémique qui a opposé l'évêque Berkeley et les héritiers de Newton, Stewart montre bien ce que cette notion de dérivée a de complexe pour avoir soulevé tant de passion. C'est un livre très amusant à lire tant par sa forme, souvent drôle, que par son fond très facile d'accès.

***Des ponts vers l'infini*. Michael Guillen, Albin Michel, 1992, 248 p.**

Professeur de physique et de mathématiques de l'université Harvard, Michael Guillen est aussi chroniqueur scientifique au *CBS Morning News*. Avec un talent de vulgarisateur égal à celui de Stewart, Reuben et Hersh, son approche est toutefois un peu plus *culturelle*. Il présente lui aussi un bon panorama des mathématiques, mais insiste davantage sur les liens entre les mathématiques et les autres sciences comme la physique. Dans ce panorama, la notion de l'infini tient une place de choix. Le quart de ses dix-sept chapitres en traite directement ou indirectement. L'infini est présent dès le chapitre deux dans l'apparition du calcul différentiel et la notion de limite. Le chapitre suivant porte sur les nombres et la continuité. Le troisième chapitre laisse l'infiniment petit pour l'infiniment grand et présente les résultats de Cantor. Le quatrième chapitre est original par rapport aux autres livres en ce sens qu'il présente des aspects que prend l'infini dans d'autres disciplines comme la physique : les *singularités*, les *trous noirs*, etc. La lecture de ce livre est particulièrement stimulante.

***Mathématiques, un nouvel âge d'or*. Keith Devlin, Masson, 1992, 252 p.**

D'origine britannique, Keith Davlin est lui aussi professeur de mathématiques dans un collège du Maine après l'avoir été à Stanford. Lui aussi est un vulgarisateur qui tient une chronique de mathématiques dans le journal anglais *Guardian*. En onze chapitres, il présente une vue plus actuelle des mathématiques, d'où son titre. Son deuxième chapitre *Les ensembles, l'infini et l'indécidable* donne un tableau bref, mais complet de l'infini en mathématiques. La méthode axiomatique, les nombres, Gödel, les ensembles, Cantor, et l'hypothèse du continu. Seul, le rôle de l'infini dans le calcul différentiel manque à l'appel. La vision *moderne* de ce livre est très intéressante et très facile à lire.

***Infini des mathématiciens, infini des philosophes*. Collectif sous la dir. de Françoise Monnoyeur, Préf. de Jean Dieudonné, Belin, 1993, 215 p.**

Neuf chapitres pour neuf temps forts sur la réflexion sur l'infini, qu'elle soit l'œuvre de mathématiciens, philosophes, hérétiques et même d'artistes. C'est aussi une histoire de la façon dont l'infini a été pensé au cours des âges et l'époque moderne a la part congrue, Cantor est à peine mentionné. Par contre, les points de vue des théologiens et hérétiques (Bruno) de la Renaissance, sont très bien exposés. Un chapitre complet, très intéressant, montre même comment l'infini est apparu dans la peinture de Toscane à l'époque de la Renaissance. Les points de vue de Descartes, Pascal, Leibniz, Newton et Kant sont particulièrement développés. C'est un livre indispensable qui permet de comprendre à quel point l'infini a été un objet de fascination et de litige entre la foi religieuse et la pensée scientifique, litige peut être plus profond que celui qui a porté sur l'héliocentrisme.

***Invitation à la philosophie des sciences*. Bruno Jarrosson, Seuil, collection Points-Sciences, 1992, 233 p.**

Écrit avec un style très clair et très vivant, ce livre donne en peu de pages *Tout ce qu'il faut savoir sur la philosophie des sciences*. La notion de l'infini est bien située dans ce contexte, notamment la place de l'hypothèse du continu, pages 41 et suivantes.

***La physique et l'infini*. Jean-Pierre Luminet, Flammarion Dominos, 1994, 127 p.**

C'est un essai intéressant, car il montre le concept de l'infini vu par des physiciens. Le monde de l'infiniment grand, la cosmologie, est aussi fascinant que le monde de l'infiniment petit. Les différentes géométries possibles d'un univers infini représentent un défi à notre imagination cartésienne. Un essai à lire pour comprendre une autre représentation de l'infini.

***L'infini en mathématiques*. Norbert Verdier, Flammarion Dominos, 1997, 127 p.**

Cet essai, plus récent, rédigé par un professeur de mathématiques de l'université de Paris Sud, est particulièrement intéressant. Il ne porte que sur le concept de l'infini en mathématiques et il en fait une présentation très complète. Norbert Verdier en fait d'abord l'histoire depuis les grecs, puis il montre comment ce concept a été à l'origine de quelques unes des crises qui ont secoué les mathématiques. Il montre comment les différents courants mathématiques de ce siècle se comprennent aussi par leur position sur le concept de l'infini. Norbert Verdier montre aussi quelques domaines des mathématiques où l'infini joue un rôle majeur. Il établit aussi des liens avec la place de l'infini en philosophie. C'est un livre d'accès facile, intéressant à lire et complet.

***De l'infini… mystères et limites de l'Univers*. Jean Pierre Luminet et Marc Lachièze-Rey, Flammarion Dunod, 2005, 185 p.**

Astrophysiciens réputés, Jean-Pierre Luminet et Marc Lachièze-Rey sont aussi des vulgarisateurs reconnus. Dans cet essai ils présentent très clairement l'histoire de l'infini en physique, comme en mathématiques. Un essai très simple et intéressant

***La Recherche*, # 268, sept. 1994. *L'infini*, Hourya Sinaceur**

***Pour la science*, numéro spécial, décembre 2000**

Bibliographie complémentaire

COUTEAU, Paul, Le *grand escalier*, Collection Champs, Flammarion, Paris, 1995, 270 p.

LÉVY-LEBLOND, Jean-Marc, Aux *contraires*, Collection nrf essais, Gallimard, Paris, 1996, 435 p.

LUMINET, Jean-Pierre et LACHIEZE-REY, Marc, La *physique et l'infini*, Collection Dominos, Flammarion, Paris, 1994, 126 p.

Philippe Etchecopar, département de mathématiques